EJERCITACION

RESOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Ejercicio n° 1:

¿Es posible determinar si el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$ con $x \in [a,b] \wedge y(a) = \alpha$ tiene solución única y si está bien planteado?

a) $y' = y\cos(x)$ $\quad x \in [0,1] \quad y(0)=1$

b) $y' = \dfrac{2}{x}y + e^x x^2$ $\quad x \in [1,2] \quad y(1) = 0$

c) $y' = 1 - y$ $\quad x \in [0,1] \quad y(0)=0$

d) $y' = -xy + \dfrac{4x}{y}$ $\quad x \in [0,1] \quad y(0)=1$

e) $y' = x^2 y + 1$ $\quad x \in [0,1] \quad y(0)=1$

Ejercicio n° 2:

Marque la opción correcta:

La Ecuación diferencial $y'(t) = -ty$ con $y(0) = 1$ en $R = \{ (t,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq t \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 2 \}$

a) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 2$

b) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 3$

c) Cumple la condición de Lipschitz con $L = 6$

d) No cumple la condición de Lipschitz en R.

Ejercicio n° 3:

Deduzca la fórmula del Método de Euler para resolver ecuaciones diferenciales de 1^er orden. Interprete geométricamente.

Ejercicio n° 4:

Resuelva las siguientes E.D. por medio de Euler, con el tamaño de paso indicado en cada una:

a) $y' = y + 1$ $\quad$ con $y(0) = 0$ $\quad y(0.1) = ?$ $\quad$ con $h = 0.02$

b) $y' = 2(y-1)/t$ $\quad$ con $y(1) = 2$ $\quad y(1.5) = ?$ $\quad$ con $h = 0.1$

c) $y' - y = 2t - t^2$ $\quad$ con $y(0)=1$ $\quad y(1) = ?$ $\quad$ con $h = 0.2$

Ejercicio n° 5:

De las siguientes afirmaciones sobre métodos de resolución numérica de ED, indique cual de ellas es verdadera:

a) En cualquier método, al reducir el h a la mitad, el error global se reduce a la mitad.
b) Es preferible utilizar el método de Taylor de orden 2 en vez de Heun.
c) Si y(t) es lineal, al resolver y'(t)= f(t,y) por Euler se obtiene resultado exacto, para todo h.
d) Ninguna de las anteriores es correcta.

Ejercicio n° 6:

a) Indique las diferencias entre los métodos de paso simple y paso múltiple para el cálculo de E.D. Dé ejemplos de cada uno de ellos.
b) ¿Qué ventaja tienen los métodos de Runge-Kutta?
c) Explique en qué consiste emplear un método Predictor-Corrector. Nombre algunos.

Ejercicio n° 7:

Sea el problema de valor inicial: $y' = x / y$ siendo $y(0) = 1$

Calcule y(0,2) por el método de HEUN tomando h=0,1

Ejercicio n° 8:

Dado el problema: $y'(t^2 + t) - y = 0$ con $y(1) = 0.5$

a) Halle y(2) con h=0.1 mediante Euler.
b) Halle y(2) con h=0.5 mediante RK 4^{to} orden.
c) ¿Cuál es más precisa?

Ejercicio n° 9:

Dada: $y'(t) = -t\,y$ con $y(0) = 1$ cuya solución exacta es $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ indique con cuál de las siguientes opciones se obtiene un resultado más preciso de y(1)

a) Con Euler tomando h=0.1
b) Con Heun tomando h=0.2
c) Con Taylor de orden 2 tomando h=0.5
d) Con RK de orden 4 tomando h=1

Ejercicio n° 10:

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

a) Con el método de Euler se puede lograr siempre muy buena precisión. F

b) Los métodos de Runge-Kutta son de paso simple. V

c) El método de Euler es un método de paso simple. V

d) La ventaja de los métodos de Runge Kutta es que obtienen la misma precisión que Taylor de orden superior sin necesidad de calcular derivadas de orden superior. V

Ejercicio n° 11:

Dado el problema de valor inicial: $t\,y'(t) + y(t) = 0$ con $y(1) = 1$

a) Verifique la condición de Lipschitz para $t \in [1,2]$ e indique si el problema tiene solución única.

b) Obtenga $y(1.2)$ e $y(1.4)$ por Euler (con $h=0.2$).

OPTATIVO:

c) Teniendo en cuenta los valores anteriores, halle $y(1.6)$ mediante Adams-Bashford de 3 pasos.

d) Considerando los valores $y(1.2)=0.8333$ $y(1.4)=0.71428$ $y(1.6) = 0.625$, utilice la fórmula de Adams Bashforth - Moulton para hallar $y(1.8)$ e $y(2.0)$ con $h=0.2$

Ejercicio n° 12:

La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4}{3}h\,[2f(t_i;w_i) - f(t_{i-1};w_{i-1}) + 2f(t_{i-2};w_{i-2})]$, corresponde a:

a) método de paso simple

b) método de 2 pasos

c) fórmula explícita

d) ninguna de las anteriores

Ejercicio n° 13:

Dadas las siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son verdaderas o falsas justificando:

a) Una fórmula implícita no puede usarse como etapa predictora.

b) La fórmula: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}[9f(t_{i+1};w_{i+1}) + 19f(t_i;w_i) - 5f(t_{i-1};w_{i-1}\} + f(t_{i-2};w_{i-2})]$

corresponde a un método de paso múltiple. (Si es así, indique de cuántos pasos).

c) La fórmula anterior solamente puede usarse como etapa correctora.

Ejercicio n° 14:

Sea el problema: $\begin{cases} x'(t) = 3x - y \\ y'(t) = 4x - y \end{cases}$ con $x(0) = 0.2 \wedge y(0)=0.5$

a) Halle $x(0.5)$ e $y(0.5)$ utilizando el método de Euler con $h=0.1$

b) Sabiendo que la solución exacta es: $x(t) = 0.2\, e^t - 0.1\, t\, e^t \wedge y(t) = 0.5\, e^t - 0.2\, t\, e^t$

Calcule el error relativo cometido en cada una.

PROBLEMAS APLICADOS

Ejercicio n° 15:

La velocidad de emisión de radioactividad de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia remanente. La ecuación diferencial que describe este fenómeno es:

$$y' = -k\, y$$

donde el signo menos refleja el hecho de que la radioactividad disminuye con el tiempo.

Supongamos que $k=0.01$ y que hay 100 g. Del material al tiempo $t=0$. ¿Cuánto material queda cuando $t=100$?

a) Halle la respuesta en forma analítica.
b) Halle la respuesta numéricamente con Euler ($h=25$, $h=10$, $h=5$, $h=1$)
c) Halle la respuesta numéricamente con Heun ($h=20$, $h=10$)
d) Halle la respuesta numéricamente con Runge-Kutta de 4^{to} orden ($h=100$, $h=50$)
e) Halle la respuesta numéricamente con Adams-Moulton ($h=10$) con los valores iniciales exactos.

Ejercicio n° 16:

Un cuerpo con masa inicial de 200 g. es acelerado por una fuerza constante de 2000 N. La masa disminuye a razón de 1 gramo por segundo. Si el cuerpo está en reposo para $t=0$, determine su velocidad luego de transcurridos 10 segundos, teniendo en cuenta que:

$$dV/dt = 2000 / (200 - t) \qquad \text{y aplicando:}$$

a) Euler con $h=10$, $h=5$, $h=2$, $h=1$
b) Heun con $h=10$, $h=5$, $h=2$, $h=1$
c) Algún método predictor corrector con $h=10$, $h=5$, $h=2$, $h=1$
d) Compare con la solución exacta.

RESPUESTAS ECUACIONES DIFERENCIALES

1) *Los que están bien planteados y tienen solución única son: a) $L=1$ b) $L=2$ c) $L=1$ e) $L=1$*

2) *La respuesta correcta es la B.*

3) *TEORICO*

4) *a) $y(0.1) \cong 0.1040808$ b) $y(1.5) \cong 3.18181818$ c) $y(1) \cong 3.190656$*

5) *La respuesta correcta es la C.*

6) *TEORICO*

7) *$y(0.2) \cong 1.01982782$*

8) *a) $y(2) \cong 0.67481519$ b) $y(2) \cong 0.65807284$ c) Exacta: 0.6666666666*

9) *La respuesta correcta es la B.*

10) *a) FALSO b) VERDADERO c) VERDADERO d) VERDADERO*

11) *a) $L=1$ b) Euler: $y(1.2) \cong 0.8$ $y(1.4) \cong 0.66666666$ c) $y(1.6) \cong 0.578571428$*
d) AB y AM : $y^*(1.8) \cong 0.55769$ $y(1.8) \cong 0.555385$

12) *La respuesta correcta es la C.*

13) *a) VERDADERO b) VERDADERO (3 pasos) c) VERDADERO*

14) *a) $x(0.5) \cong 0.248897$ $y(0.5) \cong 0.658845$ b) $er(x) = 0.64\%$ $er(y) = 0.10\%$*

15) *a) Exacta: $y(t) = 100 \bullet e^{-0.01t} \Rightarrow y(100)=36.7879441$*
   b) Euler con $h=25$: $y(100)=31.640625$ Con $h=10$: 34.867844 Con $h=5$: 35.8485922
   Con $h=1$: $y(100)=36.6032341$
   c) Heun con $h=20$: $y(100)= 37.0739843$ Con $h=10$: $y(100)=36.8540985$
   d) RK 4to con $h=100$: $y(100)=37.5$ Con $h=50$: $y(100) = 36.81708442$
   e) AM con $h=10$: $y(100)=$ 36,7878266

16) *a) Euler con $h=10$: $y(10) \cong 100$ Con $h=5$: $y(10) \cong 101.282051$*
   Con $h=2$: $y(10) \cong 102062074$ Con $h=1$: $y(10) \cong 102.323881$
   b) Heun con $h=10$: $y(10) \cong 102.631579$ con $h=5$: $y(10) \cong 102.597841$
d) Exacta: $y(10)=102.58659$

Mat. Superior

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

① ¿es posible determinar si el problema de valor inicial $y' = f(xy)$ con $x \in [a,b] \wedge y(a) = \alpha$ tiene solución única y si está bien planteado?

a) $y' = \underbrace{y\cos(x)}_{f(xy)}$ $x \in [0,1]$. $y(0) = 1$

$f'_y = \cos(x)$ entre 0 y 1 el valor máx es $\cos(0) = 1 = L$,

$\rightarrow \exists L$ tal que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \rightarrow L = 1$

además, f es una función continua $\therefore$ $\boxed{\text{es posible}}$

b) $y' = \frac{2}{x}y + e^x x^2$ $x \in [1,2]$ $y(1) = 0$

$f(xy) = \frac{2y}{x} + e^x x^2$ es una función continua en $x \in [1;2]$ ✓

$f'_y = \frac{2}{x} \rightarrow$ es máx en $x = 1 \rightarrow L = f'_{y(1)} = \boxed{2 = L}$ $\exists L$ ✓ $\boxed{\text{es posible}}$

c) $y' = 1 - y$ $x \in [0,1]$ $y(0) = 0$

$f(xy) = 1 - y$ es continua en $\mathbb{R}^2$ ✓

$f'_y = -1 \rightarrow L = -1 \; \forall x \in \mathbb{R}$ ✓ $\therefore$ $\boxed{\text{es posible}}$

d) $y' = -xy + \frac{4x}{y}$ $x \in [0,1]$ $y(0) = 1$

$f(xy) = -xy + \frac{4x}{y}$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{x,0\}$

? $f'_y = -x - \frac{4x}{y^2}$

e) $y' = x^2 y + 1$ $x \in [0,1]$, $y(0) = 1$

$f(xy) = x^2 y + 1$ es continua en $\mathbb{R}^2$ ✓

$f'_y = x^2 \rightarrow$ máx valor en $x = 1 \rightarrow L = 1$ ✓ $\boxed{\text{es posible}}$

② Marque la opción correcta:

La ecuación diferencial $y'(t) = -ty$ con $y(0)=1$ en $R = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 \le t \le 3,\ 0 \le y \le 2\}$

a) Cumple la condición de Lipschitz con $L=2$
b) " " " " " " $L=3$
c) " " " " " " $L=6$
d) No cumple la condición de Lipschitz en R

$f(t,y) = -ty \rightarrow f'_y = -t \longrightarrow |f'_y|_{máx} = \boxed{3 = L}$ pues $0 \le t \le 3$

---

③ Deduzca la fórmula de Euler para resolver ecuaciones diferenciales de 1º orden. Interprete geométricamente

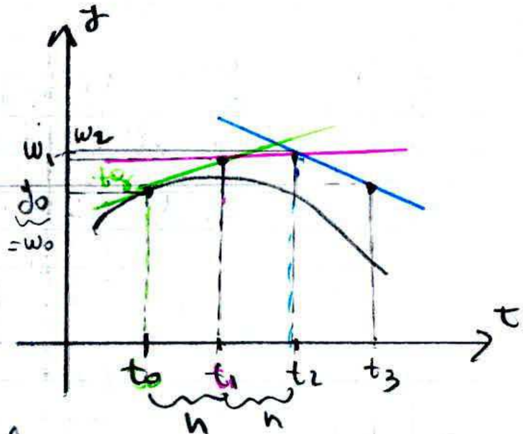
Es un método de paso simple y consiste en aproximar la función por la serie de Taylor, tomando sólo hasta 1º orden

$$\boxed{y(t+h) \cong y(t) + y'(t) \cdot h}$$

tomo $t = t_i \rightarrow t+h = t_{i+1}$. Además: $\boxed{y'(t) = f(t,y)}$,

Entonces: $\boxed{w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)}$

<u>Interpretación geométrica:</u>



w_i representan los valores aproximados de y_i
$w_0 = y_0$ (el dato dado)

Para hallar w_1 se parte de (t_0, y_0) moviéndose una distancia h (en el eje t) sobre la recta tangente dada en (t_0, y_0). Al desplazarse h (en t) se obtiene el punto (t_1, w_1)

Luego se traza la pendiente en (t_1, w_1) y se desplaza h (en t) y se obtiene el valor w_2.

Y así sucesivamente, describiendo una poligonal

4) Resuelva las siguientes E.D. por medio de Euler, con el tamaño de paso indicado en cada una:

a) $y' = y + 1$ con $y(0) = 0$, $y(0.1) = ?$ con $h = 0{,}02$

$\boxed{f(t,y) = y + 1}$ $\rightarrow f'_y(t,y) = 1 = L$ ✓

$t_0 = 0$ $\quad w_0 = 0$

$t_1 = 0{,}02$ $\quad w_1 = w_0 + h f(t_0, w_0) = 0 + 0{,}02\, f(0;0) = 0{,}02 \cdot 1 = 0{,}02 = w_1$

$t_2 = 0{,}04$ $\quad w_2 = w_1 + h \cdot f(t_1; w_1) = 0{,}02 + 0{,}02\, f(0{,}02; 0{,}02) = 0{,}02 + 0{,}02 \cdot 1{,}02 = 0{,}0404 = w_2$

$t_3 = 0{,}06$ $\quad w_3 = w_2 + h \cdot f(t_2; w_2) = 0{,}0404 + 0{,}02\, f(0{,}04; 0{,}0404) = 0{,}0404 + 0{,}02 \cdot 1{,}0404 = 0{,}061208 = w_3$

$t_4 = 0{,}08$ $\quad w_4 = w_3 + h \cdot f(t_3; w_3) = 0{,}061208 + 0{,}02\, f(0{,}06; 0{,}061208) = 0{,}08243216 = w_4$

$t_5 = 0{,}1$ $\quad w_5 = w_4 + h \cdot f(t_4; w_4) = 0{,}08243216 + 0{,}02\, f(0{,}08; 0{,}08243216) = 0{,}1040808032$

$$\boxed{y(0.1) \cong w_5 = 0{,}1040808032}$$ ✓

b) $y' = \dfrac{2(y-1)}{t}$ con $y(1) = 2$ $\quad y(1{,}5) = ?$ con $h = 0{,}1$

$f(t,y) = \dfrac{2(y-1)}{t} \rightarrow f'_y = \dfrac{2}{t} \rightarrow L = 2$ (en $t = 1$) ✓

$t_0 = 1$ $\quad w_0 = 2$

$t_1 = 1{,}1$ $\quad w_1 = 2 + 0{,}1 \cdot \overbrace{f(1;2)}^{2} = 2{,}2$

$t_2 = 1{,}2$ $\quad w_2 = 2{,}2 + 0{,}1\, f(1{,}1; 2{,}2) = 2{,}2 + 0{,}1 \cdot 2{,}1\overline{81} = 2{,}4\overline{18}$

$t_3 = 1{,}3$ $\quad w_3 = 2{,}4\overline{18} + 0{,}1\, f(1{,}2; 2{,}4\overline{18}) = 2{,}4\overline{18} + 0{,}1 \cdot 2{,}\overline{36} = 2{,}\overline{654}$

$t_4 = 1{,}4$ $\quad w_4 = 2{,}\overline{654} + 0{,}1\, f(1{,}3; 2{,}\overline{654}) = 2{,}\overline{9090}$

$t_5 = 1{,}5$ $\quad w_5 = 2{,}\overline{90} + 0{,}1\, (f(1{,}4; 2{,}\overline{90}) = 3{,}\overline{18}$

$$\boxed{y(1{,}5) \cong w_5 = 3{,}1818\overline{18}}$$ ✓

c) $y' - y = 2t - t^2$ con $y(0) = 1$ $\quad y(1) = ?$ con $h = 0{,}2$

$f(t,y) = y + 2t - t^2 \rightarrow f'_y = 1 = L$ ✓

$t = 0$ $\quad w_0 = 1$

$t = 0{,}2$ $\quad w_1 = 1 + 0{,}2\, \overbrace{f(0,1)}^{1} = 1{,}2$

$t = 0{,}4$ $\quad w_2 = 1{,}2 + 0{,}2\, f(0.2; 1.2) = 1{,}512$

$t = 0{,}6$ $\quad w_3 = 1{,}512 + 0{,}2\, f(0.4; 1{,}512) = 1{,}9424$

$t = 0{,}8$ $\quad w_4 = 1{,}9424 + 0.2\, f(0.6; 1{,}9424) = 2{,}49888$

$t = 1$ $\quad w_5 = 2{,}49888 + 0{,}2\, f(0.8; 2{,}49888) = 3{,}190656$

$$\boxed{y(1) \cong w_5 = 3{,}190656}$$ ✓

⑤ De las siguientes afirmaciones sobre métodos de resolución numérica de ED, indique cuál de ellas es verdadera:

a) En cualquier método, al reducir el h a la mitad, el error global se reduce a la mitad (NO, depende del orden)

b) Es preferible utilizar el método de taylor de orden 2 en vez de Heun (NO, pues Heun es de orden 3)

ⓒ Si $y(t)$ es lineal, al resolver $y'(t) = f(t,y)$ por Euler se obtiene resultado exacto para todo h.

El método por Euler es lineal ∴ si $y(t)$ es lineal se obtiene un resultado exacto

d) Ninguna de las anteriores

---

⑥ a) Indique las diferencias entre los métodos de paso simple y paso múltiple para el cálculo de ED. Dé ejemplos de cada uno de ellos.

<u>Métodos de paso simple</u>: el valor de y_{i+1} se calcula a partir de la ecuación dada y de información únicamente de t_i y de y_i

Ej: Euler, taylor, Heun y Runge-Kutta

<u>Métodos de pasos múltiples</u>: usan varios puntos $y_{i-1}, y_{i-2}, \dots y_{i-k}$ para hallar y_i ∴ requiere información de varios puntos anteriores

Ej: Adams Bashforth, Adams Moulton, Milne Simpson

b) ¿Qué ventaja tienen los métodos de Runge-Kutta?

tiene la misma precisión que tiene taylor pero con menos cuentas.
Es un método de paso simple que incluye cálculo de derivadas de primer orden pero que, a su vez, producen resultados equivalentes del método de Taylor de orden superior

c) Explique en qué consiste emplear un método Predictor - corrector. Nombre algunos

Es una combinación de métodos implícito - explícito.

<u>Implícitos</u>: usualmente se utilizan para mejorar las aproximaciones obtenidas mediante los métodos explícitos. Nunca se usan solos

ec. dif.

7) Sea el problema de valor inicial: $y' = \frac{x}{y}$ siendo $y(0) = 1$
Calcule $y(0,2)$ por el método Heunn tomando $h=0,1$

$f(x,y) = \frac{x}{y}$ $\qquad w_{i+1}^* = w_i + hf(x_i, w_i)$; $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i,w_i) + f(x_{i+1}, w_{i+1}^*)\right]$

$x_0 = 0 \qquad \boxed{w_0 = 1}$

$x_1 = 0,1 \qquad w_1^* = w_0 + h\, f(x_0, w_0) = 1 + 0,1\, \overbrace{f(0,1)}^{0} = 1 = w_1^*$

$w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0,w_0) + f(x_1, w_1^*)\right] = 1 + \frac{0,1}{2}\left[\overbrace{f(0,1)}^{0} + \overbrace{f(0,1;1)}^{0,1}\right] = \boxed{1,005 = w_1}$

$x_2 = 0,2 \qquad w_2^* = w_1 + h\, f(x_1, w_1) = 1,005 + 0,1 \cdot f(0,1;1,005) = 1,014950249 = w_2^*$

$w_2 = w_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1,w_1) + f(x_2, w_2^*)\right] = 1,005 + \frac{0,1}{2} \cdot \left(\underbrace{f(0,1;1,005)}_{0,09955025} + \underbrace{f(0,2;1,014950249)}_{0,1970539938}\right)$

$\boxed{w_2 = 1,019827824}$ ✓

---

8) Dado el problema: $y'(t^2+t) - y = 0$ con $y(1) = 0,5$

a) Halle $y(2)$ con $h = 0,1$ mediante Euler.

$y' = \boxed{\frac{y}{t^2+t} = f(t,y)} \qquad w_{i+1} = w_i + h\, f(t_i, w_i) \qquad$ con $w_0 = y_0$

$t_0 = 1 \qquad w_0 = 0,5$
$t_1 = 1,1 \qquad w_1 = 0,5 + 0,1\, \overbrace{f(1, 0,5)}^{0,25} = 0,525$
$t_2 = 1,2 \qquad w_2 = 0,525 + 0,1\, f(1,1; 0,525) = 0,54772$
$t_3 = 1,3 \qquad w_3 = 0,54772 + 0,1\, f(1,2; 0,54772) = 0,5684745179$
$t_4 = 1,4 \qquad w_4 = 0,58748704$
$t_5 = 1,5 \qquad w_5 = 0,60497178$
$t_6 = 1,6 \qquad w_6 = 0,62110436$
$t_7 = 1,7 \qquad w_7 = 0,63603475$
$t_8 = 1,8 \qquad w_8 = 0,64989172$
$t_9 = 1,9 \qquad w_9 = 0,662278639$
$t_{10} = 2 \qquad w_{10} = 0,67481519 \qquad \boxed{y(2) \cong w_{10} = 0,67481519}$

b) Halle $y(2)$ con $h = 0,5$ mediante RK 4° orden

$t_0 = 1 \qquad \boxed{w_0 = 0,5}$
$t_1 = 1,5 \qquad w_1 = 0,5 + 1/6\,(0,125 + 0,2 + 2 \times 0,097 + 0,0797) = \boxed{0,6000432099 = w_1}$

$k_1 = 0,5\, f(1; 0,5) = 0,125$
$k_2 = 0,5\, f(1,25; 0,5 + k_1/2) = 0,1$
$k_3 = 0,5\, f(1,25; 0,5 + 0,05) = 0,097$
$k_4 = 0,5\, f(1,5; 0,5 + 0,097) = 0,0797037037$

$k_1 = 0,5 \cdot f(1,5; 0,6000432099) = 0,08000576$
$k_2 = 0,5 \cdot f(1,75; 0,6400460906) = 0,066498$
$k_3 = 0,5 \cdot f(1,75; 0,6522919) = 0,0677706$
$k_4 = 0,5\, f(2; 0,6678) = 0,05565114949$

$t_2 = 2 \qquad w_2 = 0,6000432099 + 1/6\,(0,08 + 2 \times 0,0665 + 2 \times 0,0678 + 0,05565) = \boxed{0,66672385 = w_2}$

c) ¿cuál es más preciso?
la exacta es $0,66\bar{6}$ ∴ x RK orden 4° se obtiene un valor más preciso

⑨ Dada $y'(t) = -t\,y$ con $y(0) = 1$ cuya solución exacta es $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ indique con cuál de los sig. opciones se obtiene un resultado más preciso de $y(1)$

a) Con Euler tomando. $h = 0,1$ orden 1

b) Con Heun tomando $h = 0,2$ orden 3

c) Con taylor de orden 2 tomando $h = 0,5$ orden 2

d) Con RK de orden 4 tomando $h = 1$ orden 4

Si bien RK es de orden superior que Heun, el h tomado para Heun es mucho menor que el que se tomó para RK de orden 4

---

⑩ Dados los siguientes afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son V o F, justificando:

a) Con el método de Euler se puede lograr siempre muy buena precisión

F . Es una precisión lineal

b) Los métodos de Runge-Kutta son de paso simple V

c) El método de Euler es un método de paso simple V

d) La ventaja de los métodos RK es que obtiene la misma precisión que taylor de orden superior sin necesidad de calcular derivadas de orden superior V

---

⑪ Dado el problema de valor Inicial: $t\,y'(t) + y(t) = 0$ con $y(1) = 1$

a) Verifique la condición de Lipschitz para $t \in [1,2]$ e indique si el problema tiene solución única.

$$y' = -\frac{y}{t} \rightarrow \boxed{f(t,y) = \frac{-y}{t}} \Rightarrow f'_y = -\frac{1}{t} \quad t \in [1,2] \rightarrow \boxed{L = 1}$$

b) Obtenga $y(1.2)$ e $y(1.4)$ por Euler (con $h = 0,2$)

$t_0 = 1 \qquad w_0 = 1$

$t_1 = 1,2 \qquad w_1 = 1 + 0,2\, f(1;1) = 1 + 0,2 \times (-1) = \boxed{0,8 = w_1 \cong y(1,2)}$

$t_2 = 1,4 \qquad w_2 = 0,8 + 0,2\, f(1,2;\ 0,8) = 0,8 + 0,2 \cdot (-2/3) = \boxed{0,666 = w_2 \cong y(1,4)}$

12. La fórmula: $w_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4}{3}h\left[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-2}, w_{i-2})\right)$ corresponde a:

a) método de paso simple b) método de dos pasos

c) fórmula explícita d) ninguna de los anteriores

13. Dadas las sig. afirmaciones referentes a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales, indique si son V o F justificando:

a) una fórmula implícita no puede usarse como etapa predictora $\boxed{V}$

b) La fórmula: $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})\right]$

corresponde a un método de paso múltiple (si es así, indique de cuántos pasos.

$\boxed{V}$ es de 3 pasos

c) La fórmula anterior solamente puede usarse como etapa correctora

$\boxed{V}$, pues es una fórmula implícita

14. Sea el problema $\begin{cases} x'(t) = 3x - y \\ y'(t) = 4x - y \end{cases}$ con $x(0) = 0,2 \wedge y(0) = 0,5$

a) Halle $x(0,5)$ e $y(0,5)$ utilizando el método de Euler con $\boxed{h = 0,1}$

$$\begin{cases} f(t,x,y) = 3x - y \\ g(t,x,y) = 4x - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h.f(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i, x_i, y_i) \end{cases}$$

$t_0 = 0$
$t_1 = 0,1$
$t_2 = 0,2$
$t_3 = 0,3$
$t_4 = 0,4$
$t_5 = 0,5$

$$\begin{cases} x_0 = 0,2 \\ y_0 = 0,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,2 + 0,1\,.\,f(0;\,0.2;\,0.5) = 0,21 \\ y_1 = 0,5 + 0,1\,.\,g(0;\,0.2;\,0,5) = 0,53 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0,21 + 0,1\,.\,f(0,1;\,0.21;\,0,53) = 0,22 \\ y_2 = 0,53 + 0,1\,g(0.1;\,0,21;\,0,53) = 0,561 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{cases} x_3 = 0,22 + 0,1\,f(0,2;\,0,22;\,0,561) = 0,2299 \\ y_3 = 0,561 + 0,1\,f(0,2;\,0,22;\,0,561) = 0,5929 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 0,2299 + 0,1\,f(0,3;\,0.2299;\,0,5929) = 0,23958 \\ y_4 = 0,5929 + 0,1\,f(0,3;\,0,2299;\,0,5929) = 0,62557 \end{cases} \quad \Bigg\| \quad \begin{cases} x_5 = 0,23958 + 0,1\,f(0,4;\,0,24;\,0,63) = 0,248897 \\ y_5 = 0,62557 + 0,1\,f(0,4;\,0,24,\,0,63) = 0,658845 \end{cases}$$

$$\boxed{x(0,5) \doteq 0,248897 \qquad y(0,5) \doteq 0,658845}$$

b) Sabiendo que la solución exacta es $x(t) = 0,2e^t - 0,1te^t \wedge y(t) = 0,5e^t - 0,2te^t$
Calcule el error relativo cometido en cada una

$x(0,5) = 0,2473081906 \rightarrow err\,\%\,x = 0,64\%$

$y(0,5) = 0,6594885083 \rightarrow err\,\%\,y = 0,10\%$

Problemas aplicados

(15) La velocidad de emisión de radioactividad de una sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia remanente. La ecuación diferencial que describe este fenómeno es: $y' = -k y$
donde el signo menos refleja el hecho de que la radioactividad disminuye con el tiempo.
Supongamos que $k = 0{,}01$ y que hay 100 g. del material al tiempo $t=0$ ¿cuánto material queda cuando $t = 100$?

a) Halle la respuesta en forma analítica $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\frac{y'}{y} = -0{,}01 \rightarrow \ln(y) = -0{,}01x + c_1 \rightarrow y = c_2 e^{-0{,}01x}$$

$$\text{en } y(0) = 100 \rightarrow c_2 = 100 \rightarrow \boxed{y = 100\, e^{-0{,}01x}}$$

$$y(100) = 100\, e^{-0{,}01 \times 100} = 100 e^{-1} = \boxed{36{,}78794412 = y(100)}$$

b) Halle la respuesta numéricamente con Euler ($h=25$, $h=10$, $h=5$, $h=1$)

Hecho con la compu: • con $h=25 \rightarrow y(100) \cong 31{,}64025$

• con $h = 10 \rightarrow y(100) \cong 34{,}867844$

• con $h = 5 \rightarrow y(100) \cong 35{,}848592$

• con $h = 1 \rightarrow y(100) \cong 36{,}6032341$

c) Halle la respuesta numéricamente con Heun ($h=20$, $h=10$)

con $h=20 \rightarrow y(100) \cong 37{,}0739843$

con $h = 10 \rightarrow y(100) \cong 36{,}8340983$

d) Halle la respuesta numéricamente con RK 4° orden ($h=100$, $h=50$)

con $h=100 \rightarrow y(100) \cong 37{,}5$

con $h = 50 \rightarrow y(100) \cong 36{,}8170844$

e) Halle la respuesta numéricamente con Adams-Moulton ($h=10$) con valores iniciales exactos

$y(0) = 100 \quad y(10) = 90{,}483 \quad y(20) = 81{,}873 \quad y(30) = 74{,}081$

$$y(100) \cong 36{,}7878266$$